Corrigé – 2024 Maths / janvier

Questions de cours

• propriétés : base orthonormale

$\vec{e_x}\cdot\vec{e_y}=0$ $\quad\vec{e_x}\cdot\vec{e_x}=1$

$\vec{e_y}\cdot\vec{e_z}=0$ $\quad\vec{e_y}\cdot\vec{e_y}=1$

$\vec{e_z}\cdot\vec{e_x}=0$ $\quad\vec{e_z}\cdot\vec{e_z}=1$

• nbre complexe $i^2=-1$

• zz' => module $\rho\rho'$; argument $(\theta+\theta')$

démonstration : $zz'=\rho e^{i\theta}\rho' e^{i\theta'}=\underbrace{\rho\rho'}_{\text{module}}e^{\overbrace{i(\theta+\theta')}^{\text{argument}}}$

• fcts réciproques $\exp x / \ln x$

$\cos x / \arccos x$

$\sin x / \arcsin x$ ...

• TF $a_0=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt$; $a_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)\,dt$

$b_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)\,dt$

fct paire => $b_n=0$

$a_0=\frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(t)\,dt$ et $a_n=\frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos(n\omega t)\,dt$

Nbres complexes

$f(x)=\frac{1+j\tan x}{1-j\tan x}=\frac{(1+\tan x)^2}{1+\tan^2 x}=\frac{1-\tan^2 x+2j\tan x}{1+\tan^2 x}$

$Re(f(x))=\frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$ et $Im(f(x))=\frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$

$f(x)$ également $f(x)=\frac{1+j\frac{\sin x}{\cos x}}{1-j\frac{\sin x}{\cos x}}=\frac{\cos x+j\sin x}{\cos x-j\sin x}=\frac{e^{ix}}{e^{-ix}}$

$=1e^{2ix}=1(\cos 2x+j\sin 2x)$

=> $\cos(2x)=\frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$ et $\sin 2x=\frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$ => non demandé.

Dérivation

$c(x)=x\ln(x+2)$ $\quad c'(x)=\ln(x+2)+\frac{x}{x+2}$

(produit $uv=u'v+v'u$)

Int par partie

$B=\int_0^{\pi/2} x\cos x\,dx$ $\quad u(x)=x \quad u'(x)=1$

$v(x)=\sin x \quad v'(x)=\cos x$

$\left(\int u\,dv=[uv]-\int v\,du\right)$ soit $B=[x\sin x]_0^{\pi/2}-\int_0^{\pi/2}\sin x\,dx=\pi/2+[\cos x]_0^{\pi/2}=\pi/2-1$

Equations différentielles

• $y''+\omega^2 y=1$ $\quad$ SSSM : $y''+\omega^2 y=0$ => $y_{sssm}=A\cos(\omega x+\varphi)$

SPE : $y_{SPE}=\frac{1}{\omega^2}$

=> SGE $y(x)=A\cos(\omega x+\varphi)+\frac{1}{\omega^2}$

• $y''-2y'+10y=5$ $\quad$ SSSM : $X^2-2X+10=0$ $\quad X=1\pm 3j$

$y_{sssm}=e^{x}(A\cos(3x)+B\sin(3x))$

SPE : $y_{SPE}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$

=> SGE : $y(x)=\frac{1}{2}+e^{x}(A\cos(3x)+B\sin(3x))$

Equation différentielle / parachute

1) Écrire RFD $\quad ma = m\dot{v} = mg - kv^2$ (ou v')

soit $v' = -\frac{k}{m}v^2 + g$ (en divisant par m)
eq diff du 1er ordre

2) soit $\dfrac{v'}{v^2 - \frac{mg}{k}} = -\dfrac{k}{m}$; posons $a^2 = \dfrac{mg}{k}$ et $b = -\dfrac{k}{m} \Rightarrow \dfrac{v'}{v^2-a^2} = b = \dfrac{dv/dt}{v^2-a^2}$

soit $\dfrac{dv}{v^2-a^2} = b\,dt$ or $\dfrac{1}{v^2-a^2} = \dfrac{1}{2a}\left(\dfrac{1}{(v-a)} - \dfrac{1}{(v+a)}\right)$

ou $\dfrac{dv}{v^2-a^2} = \dfrac{1}{2a}\left(\dfrac{dv}{v-a} - \dfrac{dv}{v+a}\right)$

en intégrant : $\displaystyle\int\frac{dv}{v^2-a^2} = \underbrace{\frac{1}{2a}\left(\int\frac{dv}{v-a} - \int\frac{dv}{v+a}\right)}_{\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{v-a}{v+a}\right| + cste} = b\int dt$

soit finalement $\dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{v-a}{v+a}\right| = bt + cste'$ or fct réciproque $e^{\ln x} = x$

donc $v(t) = a\dfrac{(1+Ce^{2abt})}{(1-Ce^{2abt})}$; $v(0) = a\dfrac{(1+C)}{(1-C)}$ vitesse initiale $\Rightarrow C = \dfrac{v(0)-a}{v(0)+a}$

finalement $v(t) = \sqrt{\dfrac{mg}{k}}\;\dfrac{\left(1 + \dfrac{v(0)-\sqrt{\frac{mg}{k}}}{v(0)+\sqrt{\frac{mg}{k}}}\,e^{-2\sqrt{\frac{gk}{m}}t}\right)}{\left(1 - \dfrac{v(0)-\sqrt{\frac{mg}{k}}}{v(0)+\sqrt{\frac{mg}{k}}}\,e^{-2\sqrt{\frac{gk}{m}}t}\right)}$